マルコフ過程の分解 : 境界近傍のPathの行動とFeller-上野分解 (マルコフ過程に対するlateral condition)

岡部, 靖憲

数理解析研究所講究録
57巻 1968年 78-102

マルコフ過程の分解
―境界近傍のpathの行動とFeller-上野分解―

東大 理 岡部靖憲

§1 序

本尾氏の論文[6]における未解決問題のひとつを解決する。
Sを第2可算公理をみたす局所コンパクト、Hausdorff空間とし、DをSのopen subsetで、Sで稠密、$\partial D=S-D$がコンパクトになるものとする。

$M^{min}=(W, P_x^{min}; x\in S)$を次の$(M^{min}.1)\sim(M^{min}.3)$をみたすマルコフ過程とする;

$(M^{min}.1)$ Hunt process,

$(M^{min}.2)$ reference measureを持つ,

$(M^{min}.3)$ $P_\xi^{min}(x_t=\xi, \forall t)=1$, $\xi\in\partial D$.

このとき、次の$(M.1)\sim(M.3)$をみたすマルコフ過程$M=(W, P_x; x\in S)$がどの位あるかを追求する;

$(M.1)$ Hunt process,

$(M.2)$ reference measureを持つ,

$$(M.3)\qquad E_x\left(\int_0^\sigma e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right) = E_x^{\min}\left(\int_0^\sigma e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right) \equiv G_\alpha^0 f(x),$$

$$E_x(e^{-\alpha\sigma} f(x_\sigma)) = E_x^{\min}(e^{-\alpha\sigma} f(x_\sigma)) \equiv H_\alpha f(x),$$

但し、σ は ∂D への到達時間であり、$\alpha > 0$, $x \in S$, $f \in B(S)$ である。

正の数 $\gamma > 0$ をひとつ固定する。本尾氏は[6]において、さらに次の仮定;

$(M^{\min}.4)$ $G_\alpha^0(C(S)) \subset C(S)$, $\alpha > 0$.
$H_\alpha(C(\partial D)) \subset C(S)$, $\alpha > 0$.

$(M^{\min}.5)$ $\alpha > 0$, $f \in C(S)$ に対して、$\dfrac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}$ は ∂D にまで、連続に拡張される. 拡張した函数を $\hat{H}_\alpha f$ とおく.

$(M^{\min}.6)$ $\hat{H}_\alpha(C(S))$ は $C(S)$ で稠密である.

の下で、M はいわゆる "boundary system" $(\hat{M}, \ell, m, Q)$ によって決定されることを証明した。未解決問題とは、"上の条件、特に $(M^{\min}.5)$; $(M^{\min}.6)$、をより深い確率論でかつ一般的なものでおきかえよ" ということである。

この報告では、まず、$(M^{\min}.1) \sim (M^{\min}.3)$ の下で、次の定理を示す.

定理　(Feller－上野 分解)

$$G_\alpha f(x) = G_\alpha^0 f(x) + H_\alpha K^\alpha\left\{\ell f + (\mathbb{P} + Q)\left(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}\right)\right\},$$

$\alpha > 0$, $x \in S$, $f \in B(S)$, ℓ は $B(\partial D)^+$ の元、$\mathbb{P}$ は、$\mathfrak{M} \equiv \left\{\dfrac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}\ ;\ \alpha > 0,\ f \in B(D)\right\}$ とおくとき、$\overline{\mathfrak{M}}\ (\subset B(D))$ から $L^\infty(\partial D, \nu)$ の中への

bounded operator で、positive であり、(ν は dt の ∂D への r 次の掃散亜の canonical measure である.[3]の P.146.)、$\mathbb{Q}$ は $\partial D \times D$ 上の bounded kernel であり、K^{α} は ∂D の上の α 次 U-process ([2]の P.63) の 0 次の resolvent である。

注意　定理の $\ell, \mathbb{Q}$ は本尾氏の $\ell, \mathbb{Q}$ にあたり、$\mathbb{P}1$ が本尾氏の m にあたる。

次に、$\mathbb{P}$ の特徴付けを与える．それには、$\mathcal{M}_\infty \equiv \left\{ \frac{G_\alpha^0 f}{G_r^0 1} ; \alpha > 0, f \in C_\infty(D) \right\}$ とおくとき、次の仮定が必要となる．

$(*_1)$　$C_\infty(D) \subset \overline{\mathcal{M}_\infty} \, (\subset B(D))$

定理　($\mathbb{P}$ の特徴付け)

仮定$(*_1)$の下で、$\mathbb{P}(C_\infty(D)) = \{0\}$ である。

そして、Feller－上野分解の一意性が成り立つ。

注意　entrance boundary を導入せずに、$\mathbb{P}$ の特徴付けを行うには、上の仮定$(*_1)$が必要となる。しかし、entrance boundary を導入することによって、一般な条件$((*_2))$に$(*_1)$をおきかえることができる。それは、次に述べる定理である。

定理　($\mathbb{P}$ の表現)

D^* を D の $\mathcal{M}_\infty$ － compact 化とする[1]。これは、$G_\alpha^0 f$ を $G_r^0 1$ で優調和変換した resolvent を $G_\alpha^1 f = \frac{G_\alpha^0 (f G_r^0 1)}{G_r^0 1}$ とおくとき、D の $G_\alpha^1(C(D))$ － compact 化と一致する。(次の仮定Iの下で.)

(※2)

<u>仮定Ⅰ</u>　$G^0_\alpha(C_\infty(D)) \subset C_\infty(D)$,　$G^0_r 1 \in C_\infty(D)$

<u>仮定Ⅱ</u>　$G^*_\alpha f = G^1_\alpha f|_D$ の連続拡張．　$f \in C(D^*)$ とおくとき、$\{ f \in C(D^*)^+ ;\ \forall \alpha > 0\ \ \alpha G^*_\alpha f \leq f \}$ が内部の点 $(\in D)$ と entrance boundary の点 $(\in D^* - D)$ とを分離する。

この仮定の下で、$\{G^*_\alpha ; \alpha > 0\}$ は Ray の仮定（[9]）をみたすので、その branching point 全体を D^*_b とおくとき、次のことが成り立つ。

∂D の各点 ξ に対して、D^* 上の（有界）測度 $\mu(\xi, d\eta)$ が存在して、次の (1), (2), (3) を満たす；

(1)　$\forall \varphi \in \overline{\mathfrak{M}}_\infty$　ν-a.e. ξ　　$\mathbb{P}\varphi(\xi) = \int_{D^*} \mu(\xi, d\eta)\, \varphi^*(\eta)$

但し、φ^* は D^* 上への φ の連続拡張した函数である。

(2) ν-a.e. $\xi \in \partial D$,　$\mu(\xi, D^*) \leq \mathbb{P}1(\xi)$

(3)　$\forall \xi \in \partial D$,　$\mu(\xi, D^*_b) = 0$

上の (1), (2), (3) をみたす $\mu(\xi, d\eta)$ は レー測度0の ξ を除いて唯ひとつである。

<u>注意</u>　仮定Ⅱは、Ray's hypothesis をみたすために必要になる。このとき、Ray の結果がうまく使えるのである。
Choquet の結果（[8]の P.43）を使って証明しようと試みると、G^*_α の range $R(G^*_\alpha)$ が内部の点 $(\in D)$ と entrance boundary の点 $(\in D^* - D)$ とを分離する　ということが必要になる。

このときは、もちろん仮定IIをみたすわけであるが、D^*_b の補集合 $D^*-D^*_b$ は $\mathcal{R}(G^*_x)$ に対する D^* の Choquet boundary と一致することが示せる。([8]のP.45)。いずれの場合も、この段階では、$\mu(\xi, d\eta)$ の support が D^*-D にあることは主張していないが、このことをもっと精密に述べるのが次の定理である。

<u>定理</u>　($\mu(\xi, d\eta)$ の support)

∂D の各点 ξ に対して、$S_\xi \equiv \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\{x \in D; dist(x,\xi) < \varepsilon\}}$ (closure は D^* において) とおくとき、

(1)　$S_\xi \subset D^*-D$

(2)　$\mu(\xi, D^*-S_\xi) = 0$

<u>注意</u>　本尾氏の仮定 $(M^{mi}.5)$, $(M^{mi}.6)$ の下では、$D^*=S$ となり、$S_\xi = \{\xi\}$ である。それ故、<u>$\mu(\xi, d\eta)$ の support を S_ξ の proper subset におとすことは不可能である。</u>上の2つの定理において、D の $\mathfrak{M}_\infty$ - compact 化を行ったために、仮定IIが必要になったが、D の $\mathfrak{M}_\infty$ - completion を行うときは、仮定IIは不必要となり、上の2の定理の内、最後の定理の(1)を除いて(これは、$\mathfrak{M}_\infty$ - completion をとったときは、D が boundaryに入らないことによる(一般には))、すべて成り立つ。一般的に、Q - compact 化と Q - completion との関係が分ったのだが、この

ことに関しては、別の機会にする。

§2 $\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}$ と $\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}$

正の数 $r>0$ を固定する。time additive functional $t\wedge\zeta(w)$ の ∂D への r 次掃散を Φ とし、その右逆函数を τ とする。ν を Φ の canonical measure（[3] の p.145）、(P, L) を M の Lévy system（[4], [11]）とし、$P_D f(x)=\int_D P(x,dy)f(y)$ と定義するとき、[6] において、我々の仮定の下で、次の事実が示されている。

<u>補題2.1</u>（[6] の p.88 の (31)）

$\exists\, l,\ m,\ n \in B^+(\partial D)$, $\exists\, Q : \partial D\times D$ 上の bounded kernel

such that (1) $l\cdot\Phi \approx \chi_{\partial D}\cdot dt$

(2) $E_x\left(\int_0^\infty e^{-rt}\, m\, d\Phi\right) = E_x\left(\sum_{s\in T_c}\int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-rt}\,dt\right), \quad \forall x\in S$

(3) $Qh\cdot\Phi \approx \chi_{\partial D}\, P_D(h\, G^0_r 1)\cdot L \quad , h\in B(D)$

(4) $n(\xi)=Q(\xi, D)$

(5) $l(\xi)+m(\xi)+n(\xi)=1 \qquad \nu\text{-a.e. } \xi\in\partial D.$

ここで、
$$T(w)\equiv\{s\ ;\ 0<s,\ \tau(s-)<\tau(s)\wedge\zeta(w)\}$$
$$T_c(w)=\{s\in T(w)\ ;\ x_{\tau(s-)-}(w) = x_{\tau(s-)}(w)\}$$
$$T_d(w)=\{s\in T(w)\ ;\ x_{\tau(s-)-}(w) \neq x_{\tau(s-)}(w)\}$$

<u>定義 2.1</u> $f,\ g,\ h\in B(S)$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $x\in S$ に対して
$$\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,g,h)(x)\equiv E_x\left(\sum_{s\in T_c} e^{-\alpha\tau(s-)} f(x_{\tau(s-)-})\, g(x_{\tau(s-)})\int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-\beta(t-\tau(s-))}\, h(x_t)\,dt\right)$$

$$\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f, g, h)(x) \doteqdot E_x\Big(\sum_{s\in T_d} e^{-\alpha\tau(s-)} f(x_{\tau(s-)-})\, g(x_{\tau(s-)}) \int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-\beta(t-\tau(s-))} h(x_t)\,dt\Big)$$

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f, g, h)(x) \doteqdot E_x\Big(\sum_{s\in T} e^{-\alpha\tau(s-)} f(x_{\tau(s-)-})\, g(x_{\tau(s-)}) \int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-\beta(t-\tau(s-))} h(x_t)\,dt\Big)$$

$$\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) \doteqdot \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_S,\ g)(x)$$

$$\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) \doteqdot \mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_S,\ g)(x)$$

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) \doteqdot \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_S,\ g)(x)$$

と定義する。

<u>補題2. 2</u>

(1) $|\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f, g, h)(x)|,\ |\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f, g, h)(x)|,\ |\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f, g, h)(x)| \leq \dfrac{\|f\|\cdot\|g\|\cdot\|h\|}{\alpha\wedge\beta}$

(2) $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f, g, h)(x) = \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f, g, h)(x) + \mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f, g, h)(x)$

(3) $\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f, g, h)(x) = \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f\times g,\ h)(x)$

$\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(\chi_{D\cup\partial},\ g)(x) = 0,\quad \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ \chi_{\partial D})(x) = 0.$

$\mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) = \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_{\partial D},\ g)(x)$

(4) $\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(\chi_{D\cup\partial},\ g)(x) = 0,\quad \mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f, g,\ \chi_{\partial D})(x) = 0.$

$\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) = \mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ 1_D,\ g)(x) \qquad \forall x\in S.$

<u>補題2.3</u> ([6]の P86の [5.4])

$f, g \in B^+(S),\quad \alpha > 0$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_{\partial D} f(x_{R_n(k)-})\, \chi_D\, g(x_{R_n(k)})\Big) = E_x\Big(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f(x_t)\, P_D g(x_t)\, dL(t)\Big) \qquad \forall x\in S.$$

$\{R_n(k)\}$は [6]の P82の (2)で定義されたマルコフ timeの列である。

補題2.4　　$f,\ g \in C(\mathfrak{S}),\ \ k \in B(\mathfrak{S}),\ \ \alpha>0,\ \beta>0,\ x \in \mathfrak{S}$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, g(x_{R_n(k)})\, G_\beta^0 k(x_{R_n(k)})\Big)$$

$$= \ \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ g,\ k)(x).$$

補題2.5　　$f \in C(\mathfrak{S}),\ \ g \in B^+(\mathfrak{S}),\ \ \alpha>0,\ \beta>0,\ \ x \in \mathfrak{S}$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \overline{R_n(k)}} f(x_{\overline{R_n(k)}-})\, G_\beta^0 g(x_{\overline{R_n(k)}})\Big)$$

$$= \ E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\, d(\widetilde{\chi_D g\cdot dt})_\beta\Big)$$

$\{\overline{R_n(k)}\}$は [6]の P87の (21) で定義されたマルコフ timeの列である。

補題2.6　　$f \in B(\mathfrak{S}),\ \ g \in B^+(\mathfrak{S}),\ \ \alpha>0,\ \beta>0,\ \ x \in \mathfrak{S}$

$$E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\, d(\widetilde{\chi_D g\cdot dt})_\beta\Big)$$

$$= \mathcal{E}^{c}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) + E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f\, P_D(G_\beta^0 g)(x_t)\, dL\Big)$$

補題2.7　　$f,\ g,\ k \in B(\mathfrak{S}),\ \ \alpha>0,\ \beta>0,\ \ x \in \mathfrak{S}$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_{\partial D} f(x_{R_n(k)-})\, \chi_D g(x_{R_n(k)})\, G_\beta^0 k(x_{R_n(k)})\Big)$$

$$= \ \mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ g,\ k)(x)$$

補題2.8　　$f,\ g,\ k \in B(\mathfrak{S}),\ \ \ \alpha>0,\ \beta>0,\ \ x \in \mathfrak{S}$

(1)　$\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ g,\ k)(x)$

$$= \ E_x\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f\, P_D(g\, G_\beta^0 k)(x_t)\, dL(t)\Big)$$

$$= \ H_\alpha K^\alpha\Big\{ f\ \ \mathcal{Q}\Big(g\cdot \frac{G_\beta^0 k}{G_\gamma^0 1}\Big)\Big\}(x)$$

(2)　$\mathcal{E}^{d}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x) = \ H_\alpha K^\alpha \Big\{ f\ \mathcal{Q}\Big(\frac{G_\beta^0 g}{G_\gamma^0 1}\Big)\Big\}(x).$

但し、K^αは、$K^\alpha g\underset{\underset{\partial D}{\uparrow}}{(\xi)} = E_\xi\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} g(x_t)\, d\Phi(t)\Big)$

である。

<u>補題2.9</u>　　$f \in B(\mathcal{S}),\quad \alpha > 0,\quad x \in \mathcal{S}$

$$G_\alpha(f\chi_{\partial D})(x) = H_\alpha K^\alpha(\ell[f]_{\partial D})(x)$$

<u>補題2.10</u>　　$f \in B(\mathcal{S}),\quad g \in B^+(\mathcal{S}),\quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ x \in \mathcal{S}$

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\, d\,\widehat{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta\right)$$
$$= \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,\ g)(x)$$

<u>補題2.11</u>　　$f,\ g \in C(\mathcal{S}),\quad h \in B(\mathcal{S}),\quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\quad x \in \mathcal{S}$

$$\lim_{k\to\infty} E_x\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha R_k(n)} f(x_{R_k(n)-})\, g(x_{R_k(n)})\, G_\beta^0 h(x_{R_k(n)})\right)$$
$$= \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f,\ g,\ h)(x)$$

<u>補題2.12</u>　　$f,\ g,\ h \in B(\mathcal{S}),\quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\quad \delta > 0,\ x \in \mathcal{S}$

(1)　$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^c(f,\ g,\ h)(x) - \mathcal{E}_{\alpha,\delta}^c(f, g, h)(x) + (\beta-\delta)\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^c(f, g, G_\delta^0 h)(x) = 0$

(2)　特に　$f \geq 0,\ g \geq 0,\ h \geq 0$ のとき

$$e^{-\beta t}\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^c(f,\ g,\ T_t^{\min} h)(x) \leq \mathcal{E}_{\alpha,\beta}^c(f,\ g,\ h)(x) \quad \forall t > 0$$

同じ事実が　$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^d$，$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ に対しても成立する。

<u>補題2.13</u>　　$f \in B(\mathcal{S}),\quad \alpha > 0,\quad x \in \mathcal{S},\quad \xi \in \partial D$

(1)　$\mathcal{E}_{\alpha,r}^c(f,\ 1)(x) = H_\alpha K^\alpha(mf)(x)$

(2)　$\mathcal{E}_{\alpha,r}(f,\ 1)(x) = H_\alpha K^\alpha((m+n)f)(x)$

(3)　$K^\alpha f(\xi) = \mathcal{E}_{\alpha,r}(f,\ 1)(\xi) + G_\alpha(f\chi_{\partial D})(\xi)$

以上の補題2.2～2.13は［6］の§4の結果を用い、§5と同じ考えのもとに示すことができる。詳しいことは省くことにする。

§ 3 $\mathbb{P}$

<u>補題3.1</u> 各 $\beta>0$ に対して、

$$\exists\ \widehat{\widehat{H}}_\beta : B(\xi) \longrightarrow L^\infty(\partial D, \nu) \quad \text{such that}$$

(1) bounded linear (2) positive

(3) $\mathcal{E}^c_{\alpha,\beta}(f, g)(x) = H_\alpha K^\alpha(f\ \widehat{\widehat{H}}_\beta g)(x),\ \forall\alpha>0, \beta>0, x\in\xi.$

<u>証明</u> $g\in B^+(\xi)$, $\alpha>0$, $\beta>0$ を固定する。[5] の P322 の proposition 3.4 より $\gamma\leq\beta$ のとき $\widetilde{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta \ll \widetilde{(\chi_D g\cdot dt)}_\gamma$, $0<\beta<\gamma$ のとき、$\widetilde{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta \approx \widetilde{(\chi_D g\cdot dt)}_\gamma + (\gamma-\beta)\widetilde{(U^0_\beta\cdot dt)}_\gamma$, ここで、$U^0_\beta(x) = E_x\left(\int_0^\sigma e^{-\beta t} d(\chi_D g\cdot dt)\right) \leq \frac{\|g\|}{\beta}$ 従って、いずれの場合も、$\widetilde{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta \ll \widetilde{(\chi_D g\cdot dt)}_\gamma + \frac{|\gamma-\beta|}{\beta}\|g\|\widetilde{(dt)}_\gamma \lll \frac{\beta+|\gamma-\beta|}{\beta}\|g\|\,\Phi$

従って、[2] の P13 の定理1.7 より $0\leq \exists\,\widetilde{H}_\beta g \leq \frac{\beta+|\gamma-\beta|}{\beta}\|g\|$

$$\widetilde{(\chi_D g\cdot dt)}_\beta \approx \widetilde{H}_\beta g\cdot\Phi$$

そこで、$\widehat{\widehat{H}}_\beta g \mathrel{\overset{\cdot}{=}} \widetilde{H}_\beta g - Q\left(\frac{G^0_\beta g}{G^0_\gamma 1}\right)$ とおくと、補題2.8, 2.10 より $\mathcal{E}^c_{\alpha,\beta}(f, g)(x) = \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(f, g) - \mathcal{E}^d_{\alpha,\beta}(f, g)(x)$

$= E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\, \widetilde{H}_\beta g(x_t)\, d\Phi\right) - E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\, Q\left(\frac{G^0_\beta g}{G^0_\gamma 1}\right)(x_t)\, d\Phi\right)$

$= H_\alpha K^\alpha(f\ \widehat{\widehat{H}}_\beta g)(x).$

$g\in B^+(\xi)$ に対して定義された $\widehat{\widehat{H}}_\beta$ を $B(\xi)$ にまで拡張することはわけがなく、$Q1\leq 1$（補題2.1）と $\widetilde{H}_\beta g$ の評価式より、$\widehat{\widehat{H}}_\beta$ は $B(\xi)$ から $L^\infty(\partial D, \nu)$ の中への bounded linear operator となり、結論の (1), (3) はみたされ、(2) は (3) と $\mathcal{E}^c_{\alpha,\beta}$ の定義式より分る。

<u>補題3.2</u>　　$f,\ g \in B(\mathfrak{S}),\ \ \alpha>0,\ \beta>0$ に対して、

$$\frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}(x) = \frac{G_\beta^0 g}{G_\gamma^0 1}(x)\ \ \forall x\in D \ \Longrightarrow\ \widehat{H}_\alpha f = \widehat{H}_\beta g$$

<u>証明</u>　$\forall k \in C(\mathfrak{S})$ fix. 補題2.4より、仮定の下で、
$\mathcal{E}_{\gamma,\alpha}^{c}(k, f)(x) = \mathcal{E}_{\gamma,\beta}^{c}(k, g)(x)\ \ \forall x\in\mathfrak{S}$. 従って、補題3.1より
$H_\gamma K^\gamma(k\,\widehat{H}_\alpha f)(x) = H_\gamma K^\gamma(k\,\widehat{H}_\beta g)(x)\ \ \forall x \in \mathfrak{S}$. これより、
$\widehat{H}_\alpha f = \widehat{H}_\beta g$ が従う。

<u>定理3.1</u>　　<u>$(\mathbb{P})$</u>

$$\mathfrak{M} \equiv \left\{ \varphi\in B(D);\ \exists\alpha>0,\ \exists f \in B(\mathfrak{S})\ s.t.\ \varphi = \frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1} \right\}$$

とおくとき、

(1) $\mathfrak{M}$ は $B(D)$ の linear subspace であり、1_D を含む。

(2) $\exists\, \mathbb{P} : \overline{\mathfrak{M}} \longrightarrow L^\infty(\partial D, \nu)$　s.t

(イ) bounded linear　　(ロ) positive

(ハ) $\mathfrak{M} \ni \varphi = \dfrac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}$ に対しては、$\mathbb{P}\varphi = \widehat{H}_\alpha f$

(ニ) $\mathbb{P}1 = m$

<u>証明</u>　(1)は $\{G_\alpha^0;\alpha>0\}$ が resolvent equation をみたすことより。
(2)は、補題3.2より、$\mathbb{P}\left(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}\right) \equiv \widehat{H}_\alpha f$ が well-defined となり、$\widehat{H}_\alpha$ の linearity より $\mathbb{P}$ が $\mathfrak{M}$ において linear となる。
$\mathbb{P}$ の $\mathfrak{M}$ における positivity は、$\forall k \in C^+(\mathfrak{S})$ に対して、補題2.4より、$G_\beta^0 f \geq 0$ のとき、$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{c}(k, f)(x) \geq 0\ \ \forall x\in\mathfrak{S}$. 従って、補題3.1と $\mathbb{P}$ の定義より　$H_\alpha K^\alpha\left\{k\ \mathbb{P}\left(\frac{G_\beta^0 f}{G_\gamma^0 1}\right)\right\}(x) \geq 0\ \ \forall x \in \mathfrak{S}$.

この関係は $h \in B^+(\mathfrak{S})$ に対しても成り立つので、$\mathbb{P}\left(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}\right) \geq 0$ となる。$\mathbb{P}$ の $\overset{(\mathfrak{M}\text{における})}{\text{boundedness}}$ は $\mathbb{P}$ の linearity と positivity があるから、$\mathbb{P}1 = m$ を示せばよいが、$\mathbb{P}1 = m$ は 補題2.13 より分る。従って、あとは $\mathcal{D}(\mathbb{P})$ を $\overline{\mathfrak{M}}$ にまで拡張すればよい。

<u>系 3.1</u>　　$f, g, h \in B(\mathfrak{S})$,　$\alpha > 0, \beta > 0$,　$x \in \mathfrak{S}$

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{c}(f, g, h)(x) = H_\alpha K^\alpha \left\{ f g \, \mathbb{P}\left(\frac{G_\beta^0 h}{G_\gamma^0 1}\right) \right\}(x)$$

<u>補題 3.3</u>　　$f \in B^+(\mathfrak{S})$,　$\alpha > 0$

$$\widehat{(\chi_D f \cdot dt)}_\alpha \approx (\mathbb{P} + \mathbb{Q})\left(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}\right) \cdot \Phi$$

<u>証明</u>　　補題 2.8, 2.10, 系 3.1 より。

<u>定理 3.2</u>　　<u>(Feller ― 上野 分解)</u>

$f \in B(\mathfrak{S})$,　$\alpha > 0$,　$x \in \mathfrak{S}$.

$$G_\alpha f(x) = G_\alpha^0 f(x) + H_\alpha K^\alpha \left\{ \ell f + (\mathbb{P} + \mathbb{Q})\left(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1}\right) \right\}(x)$$

<u>証明</u>　　$f \in B^+(\mathfrak{S})$ で十分。

$$\begin{aligned} G_\alpha f(x) - G_\alpha^0 f(x) &= E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t} f(x_t)\,dt\right) \qquad ((M.3)) \\ &= E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f(x_t)\,dt\right) + E_x\left(\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t} \chi_D f(x_t)\,dt\right) \\ &= E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\partial D} f(x_t)\,dt\right) + E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \, d\,\widehat{(\chi_D f \cdot dt)}_\alpha\right) \end{aligned}$$

従って、補題2.9, 3.3 より 定理3.2 を得る。

<u>補題3.4</u> $f \in C(\hat{S})$, $k \in B(S)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\varepsilon > 0$ fix.

$\{\xi \in \partial D ;\ f(\xi) \neq 0\} \ni \forall \xi \quad \xi \in \exists U$ open subset of $\hat{S}$ s.t.

$U \cap D \ni \forall x \quad \left| \frac{G^0_\beta k}{G^0_\gamma 1}(x) \right| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \left| H_\alpha K^\alpha \left(f\, g\, \mathbb{P}\left(\frac{G^0_\beta k}{G^0_\gamma 1}\right)\right)(x) \right|$$

$$\leq \varepsilon\, H_\alpha K^\alpha (|f| \cdot |g| \cdot \mathbb{P}1)(x), \quad \forall x \in \hat{S},\ \forall g \in C(\hat{S}).$$

<u>証明</u> 補題2.4, 系3.1 より、

$$H_\alpha K^\alpha \left(f\, g\, \mathbb{P}\left(\frac{G^0_\beta k}{G^0_\gamma 1}\right)\right)(x)$$

$$= \lim_{k \to \infty} E_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, g(x_{R_n(k)})\, G^0_\beta k(x_{R_n(k)}) \right) \qquad ①$$

一方、$E_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, g(x_{R_n(k)})\, G^0_\beta k(x_{R_n(k)}) \right)$

$$= E_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, \chi_D g \frac{G^0_\beta k}{G^0_\gamma 1} \cdot G^0_\gamma 1 (x_{R_n(k)}) \right)$$

$$= E_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, \chi_D g \frac{G^0_\beta k}{G^0_\gamma 1}(x_{R_n(k)})\, E_{x_{R_n(k)}}\left(\int_0^{\sigma} e^{-\gamma t} 1(x_t)\, dt \right) \right) \quad ((M.3))$$

$$= E_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, \chi_D g \frac{G^0_\beta k}{G^0_\gamma 1}(x_{R_n(k)}) \int_{R_n(k)}^{R_{n+1}(k)} e^{-\gamma(t - R_n(k))} 1(x_t)\, dt \right)$$

$$= E_x \left(\sum_{\Delta \in T_k} e^{-\alpha \rho(k,\Delta)} \chi_D f(x_{\rho(k,\Delta)-})\, \chi_D g \frac{G^0_\beta k}{G^0_\gamma 1}(x_{\rho(k,\Delta)}) \int_{\rho(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t - \rho(k,\Delta))} 1(x_t)\, dt \right) \ ②$$

そして、$\sum_{\Delta \in T_k} e^{-\alpha \rho(k,\Delta)} \chi_D f(x_{\rho(k,\Delta)-})\, \chi_D g \frac{G^0_\beta k}{G^0_\gamma 1}(x_{\rho(k,\Delta)}) \int_{\rho(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t-\rho(k,\Delta))} 1(x_t)\, dt$

$$= \sum_{\Delta \in T_c} \chi(\Delta \in T_k)\, e^{-\alpha \rho(k,\Delta)} \chi_D f(x_{\rho(k,\Delta)-})\, \chi_D g \frac{G^0_\beta k}{G^0_\gamma 1}(x_{\rho(k,\Delta)}) \int_{\rho(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t-\rho(k,\Delta))} 1(x_t)\, dt$$

$$+ \sum_{\Delta \in T_d} \chi(\Delta \in T_k)\, e^{-\alpha \rho(k,\Delta)} \chi_D f(x_{\rho(k,\Delta)-})\, \chi_D g \frac{G^0_\beta k}{G^0_\gamma 1}(x_{\rho(k,\Delta)}) \int_{\rho(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t-\rho(k,\Delta))} 1(x_t)\, dt$$

$$= \mathrm{I}_k + \mathrm{II}_k \qquad ③$$

とおくとき、

$$|\mathrm{I}_k|,\ |\mathrm{II}_k| \leq \frac{\|f\| \cdot \|g\| \left\| \frac{G^0_\beta k}{G^0_\gamma 1} \right\|}{\alpha \wedge \gamma} \qquad ④$$

$$\varlimsup_{k \to \infty} |\mathrm{I}_k| \leq \sum_{\Delta \in T_c} \left(\varlimsup_{k \to \infty} \chi(\Delta \in T_k)\, e^{-\alpha \rho(k,\Delta)} \chi_D f(x_{\rho(k,\Delta)-})\, \chi_D g \frac{G^0_\beta k}{G^0_\gamma 1}(x_{\rho(k,\Delta)}) \int_{\rho(k,\Delta)}^{\tau(\Delta)} e^{-\gamma(t-\rho(k,\Delta))} 1(x_t)\, dt \right) \ ⑤$$

[6] の P83 の [4.8], [4.9] より、$s \in T_c$ であるから、

$$\rho(k,s) \longrightarrow \tau(s-) \qquad ⑥$$

$$x_{\rho(k,s)-} \longrightarrow x_{\tau(s-)-} \in \partial D \qquad ⑦$$

$$x_{\rho(k,s)} \longrightarrow x_{\tau(s-)} = x_{\tau(s-)-} \qquad ⑧$$

& [6] の P83 の [4.7] より $T_k \longrightarrow T$ ⑨

$f(x_{\tau(s-)-}) \neq 0$ のとき、$\xi = x_{\tau(s-)-} \in \partial D$ に対して、仮定を用いると、$^{\exists} U$ open $\ni \xi$, $D \cap U \ni {}^{\forall} y$ $\left| \frac{G_\alpha^0 g R}{G_\gamma^0 1}(y) \right| < \varepsilon$

⑧より kを十分大きくとると、$x_{\rho(k,s)} \in D \cap U$ $(k \in T_k)$

従って、kを十分大きくとると、$\left| \frac{G_\alpha^0 g R}{G_\gamma^0 1}(x_{\rho(k,s)}) \right| < \varepsilon$

従って、このことと、⑥, ⑦, ⑨ と f, g の連続性より、

$$\sum_{s \in T_c} \left(\overline{\lim_{k \to \infty}} \chi(s \in T_k) e^{-\alpha \rho(k,s)} |\chi_D f(x_{\rho(k,s)-})| \left|\chi_D g \frac{G_\alpha^0 g R}{G_\gamma^0 1}(x_{\rho(k,s)})\right| \int_{\rho(k,s)}^{\tau(s)} e^{-\gamma(t-\rho(k,s))} 1(x_t) dt \right)$$

$$\leq \varepsilon \sum_{s \in T_c} \left(\overline{\lim_{k \to \infty}} \chi(s \in T_k) e^{-\alpha \rho(k,s)} |\chi_D f(x_{\rho(k,s)-})| |\chi_D g (x_{\rho(k,s)})| \int_{\rho(k,s)}^{\tau(s)} e^{-\gamma(t-\rho(k,s))} 1(x_t) dt \right)$$

$$= \varepsilon \sum_{s \in T_c} e^{-\alpha \tau(s-)} |f(x_{\tau(s-)-})| \, |g(x_{\tau(s-)})| \int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-\gamma(t-\tau(s-))} 1(x_t) dt) \qquad ⑩$$

一方、③の第二項 II_k については、[6] の P84 の [4.15] より、I_kと同じ考え方により、$\overline{\lim_{k \to \infty}} |\mathrm{II}_k| = 0$ ⑪

従って、①、②、③、④、⑩, ⑪ より、

$$|H_\alpha K^\alpha (f g \mathbb{P}(\tfrac{G_\alpha^0 g R}{G_\gamma^0 1}))(x)|$$

$$\leq \varepsilon \; E_x \left(\sum_{s \in T_c} e^{-\alpha \tau(s-)} |f(x_{\tau(s-)-})| |g(x_{\tau(s-)})| \int_{\tau(s-)}^{\tau(s)} e^{-\gamma(t-\tau(s-))} 1(x_t) dt \right)$$

$$= \varepsilon \; \mathcal{E}_{\alpha\gamma}^c (|f|, |g|, 1)(x)$$

$$= \varepsilon \; H_\alpha K^\alpha (|f| \cdot |g| \cdot \mathbb{P} 1_D)(x) \qquad (系3.1) \quad {}^{\forall} x \in S.$$

<u>定理3.3</u> (<u>quasi-local caracter of $\mathbb{P}$</u>)

$\overline{\mathfrak{M}} \ni \varphi,\quad \varepsilon > 0$ fix.

$\partial D \subset {}^{\exists} U$ open subset $\subset \mathfrak{F}$ s.t. $U \cap D \ni {}^{\forall} x \quad |\varphi(x)| < \varepsilon$

$\Longrightarrow \quad |\mathbb{P}\varphi(\xi)| \leq \varepsilon \qquad \nu\text{-a.e.}\ \xi \in \partial D.$

<u>証明</u> $\mathfrak{M} \ni \varphi$ に対して示せば十分である。$0 \leq {}^{\exists} f_0 \leq 1,\ f_0 \in C(\mathfrak{F}),$ $f_0(\xi) = 1,\ \xi \in \partial D.$ このとき、$\{\xi \in \partial D;\ f_0(\xi) \neq 0\} = \partial D.$ 従って、補題3.4より、${}^{\forall} g \in C(\mathfrak{F}),\ {}^{\forall} x \in \mathfrak{F}$

$$|H_\alpha K^\alpha (f_0\, g\, \mathbb{P}\varphi)(x)| \leq \varepsilon\, H_\alpha K^\alpha (|f_0|\,|g|\,\mathbb{P}1)(x)$$

$f_0|_{\partial D} = 1$ ゆえ、$|H_\alpha K^\alpha (g\mathbb{P}\varphi)(x)| \leq \varepsilon\, H_\alpha K^\alpha (|g|\mathbb{P}1)(x)$

この不等式は ${}^{\forall} g \in B^+(\mathfrak{F})$ に対して成り立つから、

$$|\mathbb{P}\varphi(\xi)| \leq \varepsilon\, \mathbb{P}1(\xi) \leq \varepsilon \qquad \nu\text{-a.e.}\ \xi.$$

(補題2.1, 定理3.1の(2)の($\Leftarrow$))

<u>系3.2</u> $\overline{\mathfrak{M}} \ni \varphi$;

${}^{\forall}\varepsilon > 0 \quad \partial D \subset {}^{\exists} U$ open subset $\subset \mathfrak{F}$ s.t.

$U \cap D \ni {}^{\forall} x \quad |\varphi(x)| < \varepsilon$

$\Longrightarrow \quad \mathbb{P}\varphi = 0$

<u>系3.3</u> $\overline{\mathfrak{M}} \ni \varphi$; $\partial D \subset {}^{\exists} U$ open subset $\subset \mathfrak{F}$ s.t.

$U \cap D \ni {}^{\forall} x \quad \varphi(x) = 0$

$\Longrightarrow \quad \mathbb{P}\varphi = 0$

<u>補題3.5</u>　$\alpha>0$ fix.　$f_m \in B(S)^+$, $G^0_\alpha f_m \uparrow_{(m)}$

このとき、$\forall f \in C^+(S)$, $\forall x \in S$.

$$H_\alpha K^\alpha \Big(f \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{G^0_\alpha f_m}{G^0_\gamma 1}\Big)\Big)(x)$$

$$= \lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-}) \lim_{m\to\infty} \frac{G^0_\alpha f_m}{G^0_\gamma 1}(x_{R_n(k)})\, G^0_\gamma 1(x_{R_n(k)})\Big) \quad (\leq +\infty)$$

<u>証明</u>　[6] の p82 の (2) の $\rho(k)$ として、$\rho(k) \equiv \frac{1}{k} \wedge \sigma_{D_R} \wedge \inf\{ t\,;\, dist(x_t, x_0) \geq \frac{1}{k} \}$ $(k=1,2,\cdots)$ をとると、$\rho(k) \geq \rho(k+1)$ ①

をみたす。$\forall f \in C^+(S)$ fix. 補題2.4, 系3.1より、

$$H_\alpha K^\alpha \Big(f\, \mathbb{P}\Big(\frac{G^0_\alpha f_m}{G^0_\gamma 1}\Big)\Big)(x) = \lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, G^0_\alpha f_m(x_{R_n(k)})\Big) \quad ②$$

であるから、仮定より、各 k をとめたとき、

$$E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, G^0_\alpha f_m(x_{R_n(k)})\Big) \text{ は } \uparrow_{(m)} \quad ③$$

一方、$E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, G^0_\alpha f_m(x_{R_n(k)})\Big)$

$$= E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_D f(x_{R_n(k)-}) \int_{R_n(k)}^{\sigma_n(k)} e^{-\alpha t} f_m(x_t)\, dt \Big)$$

であるから、① と $\{R_n(k)\}$, $\{\sigma_n(k)\}$ の定義と $f \geq 0$, $f_m \geq 0$ より、

各 m をとめたとき、$E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-})\, G^0_\alpha f_m(x_{R_n(k)})\Big)$ は $\uparrow_{(k)}$ ④

従って、②,③,④ より、$\mathbb{P}$ の positivity を使って、

$$H_\alpha K^\alpha \Big(f \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{G^0_\alpha f_m}{G^0_\gamma 1}\Big)\Big)(x)$$

$$= \lim_{m\to\infty} H_\alpha K^\alpha \Big(f\, \mathbb{P}\Big(\frac{G^0_\alpha f_m}{G^0_\gamma 1}\Big)\Big)(x) \qquad (\text{monotone convergence})$$

$$= \lim_{k\to\infty} E_x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_D f(x_{R_n(k)-}) \lim_{m\to\infty} \frac{G^0_\alpha f_m}{G^0_\gamma 1}(x_{R_n(k)})\, G^0_\gamma 1(x_{R_n(k)})\Big)$$

が成り立つ。

§4 $\mathcal{D}(\mathbb{P})$

前章の定理3.1において、$\overline{\mathfrak{M}}$ 上で定義され、値を $L^{\infty}(\partial D, \nu)$ の中に取る有界線型作用素 $\mathbb{P}$ を導入し、定理3.3によって、$\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ との相異は「$\mathbb{P}$ が境界近くでの quasi-local character property をもち、$\mathbb{Q}$ は $\partial D \times D$ 上の有界な核である」という事は分ったが、実際問題として、定理3.2の resolvent の分解式から、$\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ の完全なる分離を行うには、$\mathcal{D}(\mathbb{P}) = \overline{\mathfrak{M}}$ の考察が必要である。

定理4.1　　仮定 (※1)：$C_{\infty}(D) \subset \overline{\mathfrak{M}_{\infty}}$

の下で、$$\mathbb{P} C_{\infty}(D) = \{0\}$$ である。

証明　系3.3より、$\mathbb{P} C_0(D) = \{0\}$ が分り、$C_0(D)$ が $C_{\infty}(D)$ で稠密なことと、$\mathbb{P}$ の boundedness より、$\mathbb{P} C_{\infty}(D) = \{0\}$ が成立する。

それでは、$C_{\infty}(D) \subset \overline{\mathfrak{M}_{\infty}}$ はいかなる条件の下で成り立つのであろうか？ それに答えるのが次の定理である。

定理4.2

$\{G^0_{\alpha};\ \alpha > 0\}$ は D 上の diffusion に対応する resolvent とし、(1) $G^0_{\alpha}(C_{\infty}(D)) \subset C_{\infty}(D)$ (2) $G^0_{1} 1 \in C(D)$ を仮定するならば、$$C_{\infty}(D) \subset \overline{\mathfrak{M}_{\infty}}$$ が成り立つ。

証明は省略する。（Hille-Yoshidaの定理を使う。）

§5 $\mathbb{P}$の表現 (I)

今までの章とは離れて、一般的な事実を証明する。

D を第2可算公理をみたす局所コンパクト、Hausdorff 空間とし、$(V, \mathcal{F}, \nu)$ を測度空間とする。

$\{G_\alpha^0 ; \alpha > 0\}$: a family of resolvents

$$\left\{\begin{array}{l} G_\alpha^0 : B(D) \longrightarrow B(D) \\ \text{(i) linear (ii) positive (iii) } \alpha G_\alpha^0 1 \le 1 \\ \text{(iv) } G_\alpha^0 - G_\beta^0 + (\alpha-\beta) G_\alpha^0 G_\beta^0 = 0 \\ \text{(v) } f \in C_\infty(D) \text{ に対して、} \alpha G_\alpha^0 f(x) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} f(x) \quad (x \in D) \\ \text{(vi) } G_\alpha^0(C_\infty(D)) \subset C_\infty(D) \\ \text{(vii) } \exists \gamma > 0 \text{ s.t. } G_\gamma^0 1 \in C_\infty(D), \quad G_\gamma^0 1(x) > 0, \forall x \in D. \end{array}\right.$$

が与えられたとする。

$$\mathcal{M} \equiv \left\{ \frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1} ; \quad \alpha > 0, \quad f \in B(D) \right\}$$

$$\mathcal{M}_\infty \equiv \left\{ \frac{G_\alpha^0 f}{G_\gamma^0 1} ; \quad \alpha > 0, \quad f \in C_\infty(D) \right\}$$

補題5.1

(1) $\mathcal{M} \subset B(D)$, linear subspace, $\ni 1$.

(2) $\mathcal{M}_\infty \subset \mathcal{M} \cap C(D)$, linear subspace, Dの点を分離する。

補題5.2

$C_0(D) \supset \exists C'$ 高々可算集合 s.t.

(1) $f, g \in C'$, a, b 有理数 $\Rightarrow af + bg \in C'$

(2) C' は $C_0(D)$ において稠密（sup normで）

<u>証明</u> K. Ito [7] の P296 の lemma 2.

<u>補題 5.3</u>

$\mathfrak{M}_\infty \supset {}^\exists \mathfrak{M}'$ 高々可算集合 s.t.

(1) $\varphi, \psi \in \mathfrak{M}'$, a, b 有理数 $\Rightarrow a\varphi + b\psi \in \mathfrak{M}'$

(2) $\mathfrak{M}'$ は $\mathfrak{M}_\infty$ において稠密（sup normで）

<u>証明</u> 補題 5.2 の C' をとり、$\mathfrak{M}' = \left\{ \frac{G_\beta f}{G_\beta 1} ; f \in C' \right\}$ が求めるものとなる。

<u>定理 5.1</u>

$$\mathbb{P} : \overline{\mathfrak{M}} \longrightarrow L^\infty(V, \mathfrak{F}, \nu)$$

(1) bounded linear (2) positive (3) $\mathbb{P}1 \leq 1$

$\Rightarrow$ V の各点 ξ に対して、D の $\mathfrak{M}_\infty$ - compact 化 D^* ([1] の p. 96) 上の有界な測度（もちろん ≥ 0）$\mu(\xi, d\eta)$ が存在して、次の (1), (2) をみたす;

(1) $\forall \varphi \in \overline{\mathfrak{M}}_\infty$ ${}^\exists \nu$-a.e. $\xi \in V$

$$\mathbb{P}\varphi(\xi) = \int_{D^*} \mu(\xi, d\eta)\, \varphi^*(\eta)$$

但し、φ^* は D^* 上への φ の連続拡張函数である。

(2) ν-a.e. $\xi \in V$ $\mathbb{P}1(\xi) = \mu(\xi, D^*)$

証明は省く。（Hahn - Banach の定理を使う。）

<u>補題5.4</u>　$\alpha>0$, $f\in B(D)$ に対して、$G_\alpha^1 f(x) \equiv \dfrac{G_\alpha^0(f\cdot G_0^0 1)(x)}{G_0^0 1(x)}$

とおくと、　$\{G_\alpha^1\,;\,\alpha>0\}$ は

(1)　$G_\alpha^1(B(D)) \subset B(D)$.　(2) linear　(3) positive　(4) $\alpha G_\alpha^1 1 \leq 1$

(5)　$G_\alpha^1 - G_\beta^1 + (\alpha-\beta)G_\alpha^1 G_\beta^1 = 0$　　(6) $G_\alpha^1(C(D)) \subset C(D)$

(7)　$\forall f\in C(D)$　$\forall x\in D$　　$\alpha G_\alpha^1 f(x) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} f(x)$

(8) $\mathcal{R} \equiv \{G_\alpha^1 f\,;\,\alpha>0,\ f\in C(D)\}$ は Dの点を分離する。

(9)　$\mathcal{R}$ は $C(D)$の linear subspace である.　(10) $\mathcal{R} \subset \mathfrak{M}_\infty$

(11)　$\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathfrak{M}_\infty}$

証明は省く.（(11) は　$f\in C_\infty(D)$ に対しては、実は

$\alpha G_\alpha^0 f \underset{\alpha\to\infty}{\Longrightarrow} f$　（一様）　が成り立つことよりでる。）

<u>補題 5.5</u>　　Dの$\mathfrak{M}_\infty$-compact化を D^* とする。

$f\in C(D^*)$, $\alpha>0$　に対して、　$G_\alpha^* f \equiv [G_\alpha^1(f|_D)]^*$　とおく。

（　$G_\alpha^1(f|_D) \in \mathcal{R} \subset \mathfrak{M}_\infty$ であるから、その連続拡大 $[G_\alpha^1(f|_D)]^*$ は

存在する。）このとき、　$\{G_\alpha^*\,;\,\alpha>0\}$　は

(1)　$G_\alpha^*(C(D^*)) \subset C(D^*)$　(2) linear　(3) positive　(4) $\alpha G_\alpha^* 1 \leq 1$

(5)　$G_\alpha^* - G_\beta^* + (\alpha-\beta)G_\alpha^* G_\beta^* = 0$

(6)　$\alpha G_\alpha^* f(x) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} f(x)$　　（$f\in C(D^*)$,　$\underline{x\in D}$）

証明は省く。（どれも容易である。）

補題 5.6　$\mathcal{R}^* \equiv \{g^*; g \in \mathcal{R}\}$, $\mathcal{M}^*_\infty \equiv \{g^*; g \in \mathcal{M}_\infty\}$

(g^* は g の連続拡大) とおくとき、

(1) $\mathcal{R}(G^*_\alpha) \subset \mathcal{R}^* \subset \mathcal{M}^*_\infty$

(2) $\overline{\mathcal{M}^*_\infty} = (\overline{\mathcal{M}_\infty})^*$, $\overline{\mathcal{R}^*} = (\overline{\mathcal{R}})^*$

(3) $\overline{\mathcal{R}(G^*_\alpha)} = \overline{\mathcal{R}^*} = \overline{\mathcal{M}^*_\infty}$

証明は省く。

補題 5.7　$\mathcal{R}(G^*_\alpha)$ は内部の点同志、entrance boundary の点 ($\in D^*-D$) 同志を分離する。

証明 $\mathcal{M}_\infty$-compact 化の定義と補題 5.5 の(6)、5.6 より。

仮定 ($*_2$)　$\{f \in C(D^*)^+; \forall\alpha>0\ \alpha G^*_{\alpha+\frac{1}{2}} f \leq f\}$ が D の点と D^*-D の点とを分離する。

補題 5.8

(1) D^* の各点 x に対して、次の性質をもつ substochastic 測度 $\mu_2(x, dy)$ が唯一つ存在する；

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G^*_\alpha f(x) = \int_{D^*} \mu_2(x,dy) f(y) \qquad \forall f \in C(D^*)$$

(2) $\forall f \in C(D^*)$, $\forall\alpha>0$, $\forall x \in D^*$

$$G^*_\alpha f(x) = \int_{D^*} \mu_2(x,dy)\, G^*_\alpha f(y)$$

(3) $\forall E$ Borel $\subset D^*$ に対して、$\mu_2(\cdot, E)$ は Borel 可測

(4) $D^*_b \equiv \{x \in D^*; \mu_2(x,dy) \neq \delta_x(dy)\}$ とおくとき、

D^*_b は F_σ-set であり、かつ $\forall x \in D^*$ に対して、

$$\mu_2(x,\ D_b^*)=0$$

(5) $D_b^* \subset D^* - D$

証明　補題5.7と我々の仮定($*_2$)より $\{G_\alpha^*;\ \alpha>0\}$ が Ray の仮定をみたすから、[9]. より。(D^*は compact metrizable space である。) (5)は補題 6.5 の (6) より。

定理 5.2

$$\mathbb{P}:\overline{\mathfrak{M}} \longrightarrow L^\infty(V,\mathcal{F},\nu)$$

(1) bounded linear　(2) positive　(3) $\mathbb{P}1 \leq 1$

$\Rightarrow$ Vの各点ξに対して、D^*上の(有界)測度$\mu(\xi,d\eta)$が存在して、次の(1),(2),(3)を満たす;

(1) $\forall \varphi \in \overline{\mathfrak{M}}_\infty$　ν-a.e. $\xi \in V$　$\mathbb{P}\varphi(\xi) = \int_{D^*} \mu(\xi,d\eta)\,\varphi^*(\eta)$

但し、φ^*はD^*上へのφの連続拡張函数である。

(2) ν-a.e $\xi \in V$　$\mu(\xi,\ D^*) \leq \mathbb{P}1(\xi)$

(3) $\forall \xi \in V$　$\mu(\xi,\ D_b^*)=0$

上の(1),(2),(3)をみたす$\mu(\xi,d\eta)$はν-測度0のξを除いて一意である。

証明　定理5.1によって得た測度を$\mu_1(\xi,d\eta)$とし、補題5.8の$\mu_2(\eta,d\eta')$を使って、各点$\xi \in V$に対して、

$$\mu(\xi,E) \equiv \int_{D^*} \mu_1(\xi,d\eta)\,\mu_2(\eta,\ E) \qquad (E\ \ \text{Borel} \subset D^*)$$

とD^*上の有界測度を作る。これが求めるものであることは

補題5.8より分る。　一意性も $D^* - D^*_b \ni \forall\eta$ に対して

$\alpha G^*_\alpha f(\eta) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} f(\eta)$ $(f\in C(D^*))$ （補題5.8の(ii)）

が成り立つことより分る。

§6　$\mathbb{P}$の表現 (II)

今度は、§3までに戻り、$\{G^0_\alpha;\alpha>0\}$ は §1のそれとし、

$V\equiv\partial D$, $\mathcal{F}\equiv$ Borel field, $\nu\equiv\Phi$ の canonical measure とし、

§5における仮定を §6においてもおくことにする。即ち、

§5の(vi),(vii), 仮定($\times_2$)をおくのである。

補題6.1　∂Dの各点ξに対して、$S_\xi \equiv \{\eta\in D^*;\ \xi\in\forall U$ nbd に対し, $\overline{U\cap D}\ni\eta\}$ (closure は D^*において) とおくと、

(1) $S_\xi = \bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\{x\in D;\ dist(x,\xi)<\varepsilon\}}$ (closure は D^*において)

(2) $S_\xi \subset D^* - D$

証明　(1)は明白である。(2)は Dが D^*の中へ homeo に入っていることによる。

補題6.2　$\mathcal{L}_+\equiv\{f\in C(D^*)^+;\ \forall\alpha>0\ \ \alpha G^*_{\alpha+\frac{1}{2}} f\le f\}$

$\mathcal{L}\equiv\{f_1-f_2;\ f_1,f_2\in\mathcal{L}_+\}$ とおく。

(1) $\{G^*_{\frac{1}{2}}f;\ f\in C(D^*)^+\}\subset\mathcal{L}_+\subset\mathcal{L}\subset C(D^*)$

(2) $\mathcal{L}$ は $C(D^*)$の vector lattice で、1を含み、D^*の点を分離する

(3) $\overline{\mathcal{L}} = C(D^*)$

(4) $\mathcal{L}_+ \ni \forall f \qquad \alpha G^*_{\alpha+\frac{1}{2}} f \underset{(\alpha)}{\uparrow}$

<u>証明</u> (1) は補題 5.5 の (5) より. (2) は $\mathcal{L}_+$ について、$\mathcal{L}_+ \ni f, g \Rightarrow f+g,\ f\wedge g,\ af \in \mathcal{L}_+\ (a \geq 0)$, $\mathcal{L}_+ \ni 1$ をみたすことによる。D^*の点を分離することは、補題 5.7 と仮定 $(\mathcal{A}_2)$ による。(3) は Stone-Weierstrassの定理である。(4) は補題 5.5 の (5) より分る。

<u>定理 6.1</u> (<u>$\mu(\xi, d\eta)$ の support</u>)

$$\nu\text{-a.e. } \xi \in \partial D \text{ に対して、} \mu(\xi, D^* - \mathfrak{S}_\xi) = 0$$

<u>証明</u> 最後まで述べたいのですが、かなり長く、面倒なので省略します。(頁数も多くなったので)。key pointは補題3.5で、補題6.2の (3) をうまく使うことにあります。

以上、証明を省略した所は、どこかに発表されると思います。

<u>文献</u>

[1] C. Constantinescu and A. Cornea ; Ideale Ränder Riemannscher Flächen , Springer-Verlag, 1963

[2] K. Kunita, K. Sato, M. Fukushima and M. Motoo ; 拡散過程と境界上のマルコフ過程 , Seminar on Probability Vol. 22, 1965

[3] M. Motoo ; Representation of a certain class of excessive functions and a generator of Markov processes

Scientific Papers of the College of General Education University of Tokyo, Vol.13, 1963, p143-159

[4] M. Motoo ; マルコフ過程の additive functional
Seminar on Probability, Vol.15, 1963

[5] M. Motoo ; The sweeping-out of additive functionals and processes on the boundary.
Ann. Inst. Stat. Math., 16 (1964), 317-345

[6] M. Motoo ; Application of additive functionals to the boundary problem of Markov processes (Lévy system of U-processes), Proc. 5-th. Berkeley Symp., Vol.2, 1967, P75-110

[7] K. Ito ; 確率論 (岩波) 1953

[8] Robert R. Phelps; Lectures on Choquet's Theorem.
D. Van Nostrand Company, Inc. 1966

[9] D. Ray ; Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes. Ann. of Math. (2), 70 (1959), 43-72

[10] K. Sato ; A decomposition of Markov processes,
J. Math. Soc. Japan, Vol.17, NO.3, 1965, P 219-243

[11] S. Watanabe ; On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process, Japan. J. Math., Vol.34 (1964), 53-70